MATEMATIKA 2

Gordan Radobolja

PMF

2. svibnja 2013.

Implicitno zadane funkcije jedne nezavisne varijable

Jednadžbu oblika

$$F(x, y) = 0$$

gdje je $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ neka funkcija dviju varijabli, možemo interpretirati i kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable

$$y = f(x), \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Implicitno zadane funkcije jedne nezavisne varijable

Jednadžbu oblika

$$F(x, y) = 0$$

gdje je $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ neka funkcija dviju varijabli, možemo interpretirati i kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable

$$y = f(x), \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Jednadžbi $F(x, y) = 0$ prirodno pridružujemo skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ definiran s

$$S = \{(x, y) \in D : F(x, y) = 0\}$$

i u pravilu ga poistovjećujemo sa samom jednadžbom kojoj je pridružen.

Implicitno zadane funkcije jedne nezavisne varijable

Definicija

Za funkciju jedne varijable $f : I \to \mathbb{R}$ *gdje je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *(obično je* I *interval ili unija intervala u* $\mathbb{R}$*) za koju vrijedi*

$$F(x, f(x)) = 0, \qquad \forall x \in I$$

kažemo da je **implicitno zadana** *jednadžbom* $F(x, y) = 0$.

Implicitno zadane funkcije jedne nezavisne varijable

Definicija

Za funkciju jedne varijable $f : I \to \mathbb{R}$ *gdje je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *(obično je* I *interval ili unija intervala u* $\mathbb{R}$*) za koju vrijedi*

$$F(x, f(x)) = 0, \qquad \forall x \in I$$

kažemo da je **implicitno zadana** *jednadžbom* $F(x, y) = 0$*.*
Ovo iskazujemo ekvivalentnim zahtjevom da je graf Γ_f *funkcije* f *sadržan u skupu* S*, odnosno*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subseteq S.$$

Implicitno zadane funkcije jedne nezavisne varijable

Napomena

Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *implicitno zadana jednadžbom* $F(x, y) = 0$, *onda je prema gornjoj definiciji i svaka restrikcija* $f : I' \to \mathbb{R}$, $I' \subseteq I$ *od* f *implicitno zadana istom jednadžbom.*

Napomena

Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *implicitno zadana jednadžbom* $F(x, y) = 0$, *onda je prema gornjoj definiciji i svaka restrikcija* $f : I' \to \mathbb{R}$, $I' \subseteq I$ *od* f *implicitno zadana istom jednadžbom.*
Dakle, $F(x, y) = 0$ *u pravilu promatramo kao jednadžbu kojom je implicitno zadana ne jedna, već više funkcija jedne varijable, a dijelovi od* S *su grafovi tih funkcija.*

Implicitno zadane funkcije jedne nezavisne varijable

Napomena

Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *implicitno zadana jednadžbom* $F(x, y) = 0$, *onda je prema gornjoj definiciji i svaka restrikcija* $f : I' \to \mathbb{R}$, $I' \subseteq I$ *od* f *implicitno zadana istom jednadžbom.*
Dakle, $F(x, y) = 0$ *u pravilu promatramo kao jednadžbu kojom je implicitno zadana ne jedna, već više funkcija jedne varijable, a dijelovi od* S *su grafovi tih funkcija.*
Naravno, od interesa je slučaj kada postoji točno jedna osnovna funkcija f *koja je implicitno zadana tom jednadžbom i čiji se graf podudara s čitavim skupom* S, $\Gamma_f = S$. *Takvu funkciju* f *nije uvijek moguće naći.*

Primjer

Ako je funkcija f zadana eksplicitno formulom

$$y = f(x), \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

onda je možemo shvatiti i kao funkciju koja je implicitno zadana jednadžbom

$$F(x, y) \equiv y - f(x) = 0,$$

pri čemu je domena od F skup $D = I \times \mathbb{R}$, a skup S je upravo graf Γ_f.

Primjer

Jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 1$$

nazivamo implicitna jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu $(0, 0)$ *i polumjerom* 1.

Primjer

Jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 1$$

nazivamo implicitna jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu $(0, 0)$ *i polumjerom* 1.
Možemo je shvatiti i kao jednadžbu oblika $F(x, y) = 0$ *kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable* x. *U ovom slučaju je* $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ *definirana na* $D = \mathbb{R}^2$, *a pridruženi skup* S *sastoji se od točaka ravnine udaljenih od ishodišta za* 1.

Primjer

Jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 1$$

nazivamo implicitna jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu $(0, 0)$ *i polumjerom* 1.

Možemo je shvatiti i kao jednadžbu oblika $F(x, y) = 0$ *kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable* x. *U ovom slučaju je* $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ *definirana na* $D = \mathbb{R}^2$, *a pridruženi skup* S *sastoji se od točaka ravnine udaljenih od ishodišta za* 1.

Razriješimo li tu jednadžbu po varijabli y *kao nepoznanici, dobivamo*

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

odnosno y *nije jednoznačno određen.*

Primjer

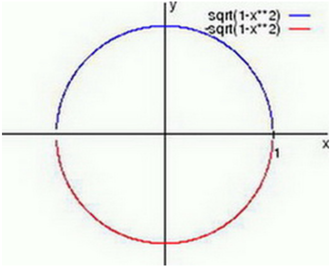
Zaključujemo da ne postoji jedna osnovna funkcija f čiji se graf podudara sa S. Zapravo, jednadžbu $x^2 + y^1 = 1$ obično interpretiramo kao jednadžbu kojom su implicitno zadane sljedeće dvije osnovne funkcije:

$$f^-(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad f^+(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in I = [-1, 1].$$

Primjer

Zaključujemo da ne postoji jedna osnovna funkcija f čiji se graf podudara sa S. Zapravo, jednadžbu $x^2 + y^1 = 1$ obično interpretiramo kao jednadžbu kojom su implicitno zadane sljedeće dvije osnovne funkcije:

$$f^{-}(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad f^{+}(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in I = [-1, 1].$$

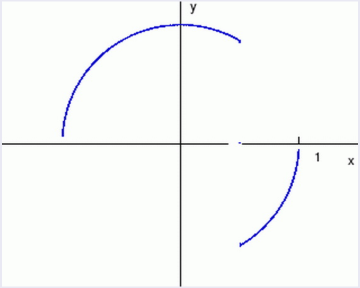


Primjer

No i funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & za\ x \in [-1, 0.5) \\ -\sqrt{1-x^2}, & za\ x \in [0.5, 1] \end{cases}$$

je također implicitno zadana jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$.



Napomena

Prema definiciji, jednadžbu $F(x, y) = 0$ *interpretiramo kao implicitnu vezu među varijablama* x *i* y, *pri čemu varijablu* x *tretiramo kao nezavisnu, a varijablu* y *kao zavisnu. Naravno da je ponekad zgodno zamijeniti uloge varijabla* x *i* y.

Napomena

Prema definiciji, jednadžbu $F(x, y) = 0$ *interpretiramo kao implicitnu vezu među varijablama* x *i* y*, pri čemu varijablu* x *tretiramo kao nezavisnu, a varijablu* y *kao zavisnu. Naravno da je ponekad zgodno zamijeniti uloge varijabla* x *i* y*.*

Primjer

Jednadžbu

$$x + 2 = 0$$

često interpretiramo kao jednadžbu pravca u ravnini koji prolazi točkom $(-2, 0)$ *na osi* x *i paralelan je sa osi* y*.*

Napomena

Prema definiciji, jednadžbu $F(x,y)=0$ *interpretiramo kao implicitnu vezu među varijablama* x *i* y*, pri čemu varijablu* x *tretiramo kao nezavisnu, a varijablu* y *kao zavisnu. Naravno da je ponekad zgodno zamijeniti uloge varijabla* x *i* y*.*

Primjer

Jednadžbu

$$x+2=0$$

često interpretiramo kao jednadžbu pravca u ravnini koji prolazi točkom $(-2,0)$ *na osi* x *i paralelan je sa osi* y*. Tu jednadžbu možemo interpretirati i kao jednadžbu oblika* $F(x,y)=0$ *gdje je* $F(x,y)=x+1$*,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *u kojoj varijablu* y *tretiramo kao nezavisnu.*

Napomena

Prema definiciji, jednadžbu $F(x,y)=0$ *interpretiramo kao implicitnu vezu među varijablama* x *i* y*, pri čemu varijablu* x *tretiramo kao nezavisnu, a varijablu* y *kao zavisnu. Naravno da je ponekad zgodno zamijeniti uloge varijabla* x *i* y*.*

Primjer

Jednadžbu

$$x+2=0$$

često interpretiramo kao jednadžbu pravca u ravnini koji prolazi točkom $(-2,0)$ *na osi* x *i paralelan je sa osi* y*. Tu jednadžbu možemo interpretirati i kao jednadžbu oblika* $F(x,y)=0$ *gdje je* $F(x,y)=x+1$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *u kojoj varijablu* y *tretiramo kao nezavisnu.*
Stoga je tom jednadžbom implicitno zadana konstantna funkcija $x=f(y)=-2$, $y\in I=\mathbb{R}$.

Primjer

Jednadžbu

$$x + y^2 = 0$$

obično nazivamo implicitnom jednadžbom parabole. Tu je $F(x, y) = x + y^2$ *definirana na* $D = \mathbb{R}^2$.

Primjer

Jednadžbu

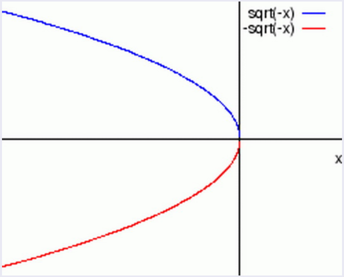
$$x + y^2 = 0$$

obično nazivamo implicitnom jednadžbom parabole. Tu je $F(x, y) = x + y^2$ *definirana na* $D = \mathbb{R}^2$.

Ako u toj jednadžbi varijablu x *interpretiramo kao nezavisnu, onda su njom implicitno zadane dvije osnovne funkcije čiji grafovi su dijelovi skupa* S *pridruženog jednadžbi. To su funkcije*

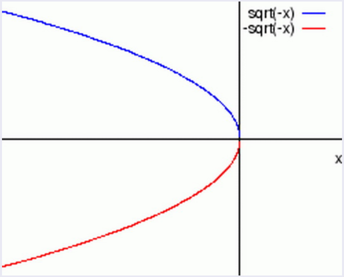
$$y = f^-(x) = -\sqrt{-x} \quad i \quad y = f^+(x) = \sqrt{-x}, \quad x \in I = \langle -\infty, 0] .$$

Primjer



$$x + y^2 = 0$$

Primjer



$$x + y^2 = 0$$

No zgodnije je varijablu y interpretirati kao nezavisnu jer se onda $x + y^2 = 0$ može shvatiti kao jednadžba kojom je implicitno zadana jedna osnovna funkcija

$$x = f(y) = -y^2, \qquad y \in I = \mathbb{R},$$

čiji se graf podudara sa skupom S pridruženim jednadžbi F.

Implicitno zadane funkcije više nezavisnih varijabli

Definicija

Neka je $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *funkcija i neka je skup* $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *zadan s*

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in X : F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0\}.$$

Implicitno zadane funkcije više nezavisnih varijabli

Definicija

Neka je $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *funkcija i neka je skup* $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *zadan s*

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in X : F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0\}.$$

Za bilo koju funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *za koju vrijedi*

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in D$$

kažemo da je implicitno zadana jednadžbom

$$F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Definicija

Neka je $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *funkcija i neka je skup* $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *zadan s*

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in X : F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0\}.$$

Za bilo koju funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *za koju vrijedi*

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in D$$

kažemo da je implicitno zadana jednadžbom

$$F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Ovo iskazujemo i ekvivalentnim zahtjevom da je graf Γ_f *sadržan u* S*:*

$$\Gamma_f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) : (x_1, \ldots, x_n) \in D\} \subseteq S.$$

Napomena

Primjedbe slične onima za slučaj funkcija jedne nezavisne varijable mogu se dati i ovdje. Jednadžbu

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right) = 0$$

uvijek promatramo kao jednadžbu kojom može biti implicitno zadano više funkcija n *varijabli pri čemu varijablu* x_{n+1} *tretiramo kao zavisnu, a* $x_1, \ldots, x_n$ *kao nezavisne.*

Napomena

Primjedbe slične onima za slučaj funkcija jedne nezavisne varijable mogu se dati i ovdje. Jednadžbu

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right) = 0$$

uvijek promatramo kao jednadžbu kojom može biti implicitno zadano više funkcija n varijabli pri čemu varijablu x_{n+1} *tretiramo kao zavisnu, a* $x_1, \ldots, x_n$ *kao nezavisne.*
Jasno je da i ovdje, po potrebi, možemo zamijeniti uloge varijabla tj. bilo koju od varijabli x_i *tretirati kao zavisnu, a preostale* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ *kao nezavisne.*

Primjer

Jednadžbom

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

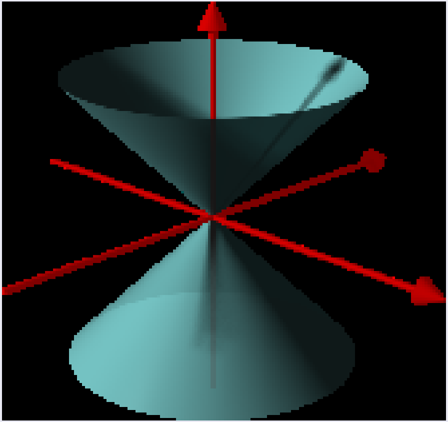
implicitno su zadana dva kružna stošca, oba s vrhom u $(0,0,0)$. *Jednom je os simetrije negativna, a drugom pozitivna poluos* z.

Primjer

Jednadžbom

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

implicitno su zadana dva kružna stošca, oba s vrhom u $(0, 0, 0)$. *Jednom je os simetrije negativna, a drugom pozitivna poluos* z.



Primjer

Ovdje je $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ *definirana na* $X = \mathbb{R}^3$ *pa ako varijablu* z *tretiramo kao zavisnu, onda su gornjom jednadžbom implicitno zadane dvije osnovne funkcije nezavisnih varijabla* x *i* y*:*

$$z = f^-(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}, \quad z = f^+(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Primjer

Ovdje je $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ *definirana na* $X = \mathbb{R}^3$ *pa ako varijablu* z *tretiramo kao zavisnu, onda su gornjom jednadžbom implicitno zadane dvije osnovne funkcije nezavisnih varijabla* x *i* y*:*

$$z = f^-(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}, \quad z = f^+(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

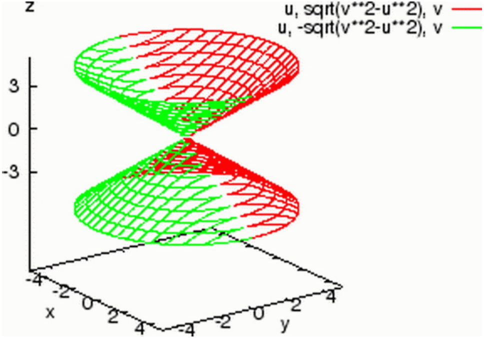
Ako bismo variablu y *tretirali kao zavisnu, onda su implicitno zadane sljedeće dvije osnovne funkcije dviju nezavisnih varijabla* x *i* z*:*

$$y = f^-(x,z) = -\sqrt{z^2-x^2}, \ (x,z) \in D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : |z| \le |x|\right\}$$

i

$$y = f^+(x,z) = \sqrt{z^2-x^2}, \ (x,z) \in D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : |z| \le |x|\right\}.$$

Grafovi tih funkcija su naznačeni zelenom $\left(f^{-}(x,z)\right)$, odnosno crvenom $\left(f^{+}(x,z)\right)$ bojom:



Primjer

U jednadžbi

$$x + y^2 + 2y + z^2 = 0$$

je $F(x, y, z) = x + y^2 + 2y + z^2$ *definirana na* $X = \mathbb{R}^3$. *Najjednostavnije je varijablu* x *tretirati kao zavisnu jer je u tom slučaju implicitno zadana točno jedna osnovna funkcija dviju nezavisnih variajbli* y *i* z

$$x = f(y, z) = -y^2 - 2y - z^2, \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Primjer

U jednadžbi

$$x + y^2 + 2y + z^2 = 0$$

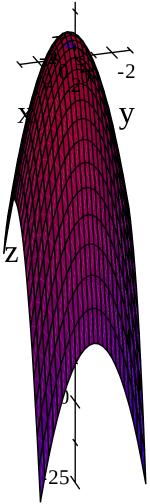
je $F(x, y, z) = x + y^2 + 2y + z^2$ *definirana na* $X = \mathbb{R}^3$. *Najjednostavnije je varijablu* x *tretirati kao zavisnu jer je u tom slučaju implicitno zadana točno jedna osnovna funkcija dviju nezavisnih variajbli* y *i* z

$$x = f(y, z) = -y^2 - 2y - z^2, \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

U stvari se ova jednadžba može ekvivalentno zapisati kao

$$x - 1 = -(y + 1)^2 - z^2$$

iz čega se vidi da je to jednadžba kružnog paraboloida s vrhom u točki $(1, -1, 0)$ *okrenutog u smjeru negativne poluosi* x



$$x - 1 = -(y+1)^2 - z^2$$

Kada postoji eksplicitna veza?

Pod kojim uvjetima iz implicitne veze $(n+1)$-ne varijable $F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$ postoji eksplicitna veza

$$x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

i koja svojstva ima takva funkcija f?

Kada postoji eksplicitna veza?

Pod kojim uvjetima iz implicitne veze $(n+1)$-ne varijable $F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$ postoji eksplicitna veza

$$x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

i koja svojstva ima takva funkcija f?

Teorem

Neka je $F : X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na otvorenom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ koja ima neprekidne parcijalne derivacije F'_{x_i} na X po svim varijablama x_i, $i = 1, \ldots, n+1$ (dakle, F je diferencijabilna u svim točkama iz X).

Kada postoji eksplicitna veza?

Pod kojim uvjetima iz implicitne veze $(n+1)$-ne varijable $F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$ postoji eksplicitna veza

$$x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

i koja svojstva ima takva funkcija f?

Teorem

Neka je $F : X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na otvorenom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ koja ima neprekidne parcijalne derivacije F'_{x_i} na X po svim varijablama x_i, $i = 1, \ldots, n+1$ (dakle, F je diferencijabilna u svim točkama iz X). Dalje, neka je $T_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0) \in X$ točka za koju vrijedi

$$F(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0) = 0, \qquad F'_{x_{n+1}}(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0) \neq 0.$$

Teorem

Tada vrijedi:

(i) *Postoji okolina* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *točke* $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ *i samo jedna funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi*

$$x_{n+1}^0 = f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \qquad i$$
$$F\left(x_1, \ldots, x_n, f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) = 0, \ \forall \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in D.$$

Teorem

Tada vrijedi:

(i) *Postoji okolina* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *točke* $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ *i samo jedna funkcija* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *za koju vrijedi*

$$x_{n+1}^0 = f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \qquad i$$
$$F\left(x_1, \ldots, x_n, f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) = 0,\ \forall \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in D.$$

(ii) *Funkcija* f *ima neprekidne parcijalne derivacije* f'_{x_i} *na* D *po svim varijablama* x_i, $i = 1, \ldots, n$ *te u svakoj točki* $\left(x_1, \ldots, x_n\right) \in D$ *vrijede formule*

$$f'_{x_i}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = -\frac{F'_{x_i}\left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right)}{F'_{x_{n+1}}\left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je

$$x_{n+1} = f\left(x_1, \ldots, x_n\right).$$

Napomena

Kad imamo implicitnu vezu dviju varijabli $F(x,y)=0$ *definiranu pomoću funkcije* $F : X \to \mathbb{R}$ *koja na* $X \subseteq \mathbb{R}^2$ *ima neprekidne parcijalne derivacije* F'_x *i* F'_y*, prethodni teorem kaže da će za svaku točku* $(x_0, y_0) \in X$ *u kojoj vrijedi*

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad i \qquad F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

postojati okolina $D \subseteq \mathbb{R}$ *od* x_0 *i samo jedna funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *koja je implicitno zadana s* $F(x,y)=0$ *i koja je neprekidno derivabilna na* D*.*

Napomena

Kad imamo implicitnu vezu dviju varijabli $F(x,y)=0$ *definiranu pomoću funkcije* $F:X\to\mathbb{R}$ *koja na* $X\subseteq\mathbb{R}^2$ *ima neprekidne parcijalne derivacije* F'_x *i* F'_y, *prethodni teorem kaže da će za svaku točku* $(x_0,y_0)\in X$ *u kojoj vrijedi*

$$F(x_0,y_0)=0 \qquad i \qquad F'_y(x_0,y_0)\neq 0$$

postojati okolina $D\subseteq\mathbb{R}$ *od* x_0 *i samo jedna funkcija* $f:D\to\mathbb{R}$ *koja je implicitno zadana s* $F(x,y)=0$ *i koja je neprekidno derivabilna na* D. *Derivacija* $f'(x)$ *u bilo kojoj točki* $x\in D$ *je određena s*

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, \qquad F(x,y)\neq 0.$$

Napomena

U slučaju implicitne veze triju varijabli $F(x, y, z) = 0$ definirane pomoću funkcije $F : X \to \mathbb{R}$ koja na $X \subseteq \mathbb{R}^3$ ima neprekidne parcijalne derivacije F'_x, F'_y i F'_z, prethodni teorem kaže da će za svaku točku $(x_0, y_0, z_0) \in X$ u kojoj je

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad i \qquad F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

postojati okolina $D \subseteq \mathbb{R}^2$ točke (x_0, y_0) i samo jedna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ koja je implicitno zadana sa $F(x, y, z) = 0$ i koja ima neprekidne parcijalne derivacije f'_x i f'_y na D.

Napomena

U slučaju implicitne veze triju varijabli $F(x, y, z) = 0$ *definirane pomoću funkcije* $F : X \to \mathbb{R}$ *koja na* $X \subseteq \mathbb{R}^3$ *ima neprekidne parcijalne derivacije* F'_x, F'_y *i* F'_z, *prethodni teorem kaže da će za svaku točku* $(x_0, y_0, z_0) \in X$ *u kojoj je*

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad i \qquad F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

postojati okolina $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *točke* (x_0, y_0) *i samo jedna funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *koja je implicitno zadana sa* $F(x, y, z) = 0$ *i koja ima neprekidne parcijalne derivacije* f'_x *i* f'_y *na* D.
Vrijednosti parcijalnih derivacija $f'_x(x, y)$ *i* $f'_y(x, y)$ *u bilo kojoj točki* $(x, y) \in D$ *su određene s*

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad F(x, y, z) = 0.$$

Primjer

Vidjeli smo da su jednadžbom $x + y^2 = 0$ *implicitno zadane dvije osnovne funkcije varijable* x

$$y = f^-(x) = -\sqrt{-x} \quad i \quad y = f^+(x) = \sqrt{-x}, \quad x \in I = (-\infty, 0].$$

Primjer

Vidjeli smo da su jednadžbom $x + y^2 = 0$ *implicitno zadane dvije osnovne funkcije varijable* x

$$y = f^-(x) = -\sqrt{-x} \quad i \quad y = f^+(x) = \sqrt{-x}, \quad x \in I = (-\infty, 0].$$

Ovdje je $F(x, y) = x + y^2$ *definirana i neprekidno derivabilna na* $X = \mathbb{R}^2$ *te su joj parcijalne derivacije dane formulama*

$$F'_x(x, y) = 1, \qquad F'_y(x, y) = 2y.$$

Primjer

Vidjeli smo da su jednadžbom $x + y^2 = 0$ *implicitno zadane dvije osnovne funkcije varijable* x

$$y = f^-(x) = -\sqrt{-x} \quad i \quad y = f^+(x) = \sqrt{-x}, \quad x \in I = \langle -\infty, 0] .$$

Ovdje je $F(x, y) = x + y^2$ *definirana i neprekidno derivabilna na* $X = \mathbb{R}^2$ *te su joj parcijalne derivacije dane formulama*

$$F'_x(x, y) = 1, \qquad F'_y(x, y) = 2y.$$

U točki $(-4, -2)$ *imamo*

$$F(-4, -2) = 0, \quad F'_x(-4, -2) = 1, \quad F'_y(-4, -2) = -4.$$

Primjer

Vidjeli smo da su jednadžbom $x + y^2 = 0$ *implicitno zadane dvije osnovne funkcije varijable* x

$$y = f^-(x) = -\sqrt{-x} \quad i \quad y = f^+(x) = \sqrt{-x}, \quad x \in I = (-\infty, 0].$$

Ovdje je $F(x, y) = x + y^2$ *definirana i neprekidno derivabilna na* $X = \mathbb{R}^2$ *te su joj parcijalne derivacije dane formulama*

$$F'_x(x, y) = 1, \qquad F'_y(x, y) = 2y.$$

U točki $(-4, -2)$ *imamo*

$$F(-4, -2) = 0, \quad F'_x(-4, -2) = 1, \quad F'_y(-4, -2) = -4.$$

Dakle, ispunjene su pretpostavke teorema pa mora postojati okolina $D \subseteq \mathbb{R}$ *od* -4 *i samo jedna derivabilna funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$ *implicitno zadana jednadžbom* $x + y^2 = 0$. *Očito, to je funkcija* f^-.

Primjer

Međutim funkciju f^- *ne možemo gledati na čitavom* $I = (-\infty, 0]$ *već samo na podskupu* $D = (-\infty, 0)$ *jer u točki* 0 *nije derivabilna.*

Primjer

Međutim funkciju f^- ne možemo gledati na čitavom $I = (-\infty, 0]$ već samo na podskupu $D = (-\infty, 0)$ jer u točki 0 nije derivabilna. Dakle

$$f(x) = -\sqrt{-x}, \qquad x \in D = (-\infty, 0).$$

Primjer

Međutim funkciju f^- *ne možemo gledati na čitavom* $I = (-\infty, 0]$ *već samo na podskupu* $D = (-\infty, 0)$ *jer u točki* 0 *nije derivabilna. Dakle*

$$f(x) = -\sqrt{-x}, \qquad x \in D = (-\infty, 0).$$

Da bi izračunali $f'(-4)$ *ne treba nam eksplicitni izraz za* $f'(x)$ *već imamo*

$$f'(-4) = -\frac{F'_x(-4,-2)}{F'_y(-4,-2)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

Primjer

Međutim funkciju f^- *ne možemo gledati na čitavom* $I = (-\infty, 0]$ *već samo na podskupu* $D = (-\infty, 0)$ *jer u točki* 0 *nije derivabilna. Dakle*

$$f(x) = -\sqrt{-x}, \qquad x \in D = (-\infty, 0).$$

Da bi izračunali $f'(-4)$ *ne treba nam eksplicitni izraz za* $f'(x)$ *već imamo*

$$f'(-4) = -\frac{F'_x(-4, -2)}{F'_y(-4, -2)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

U ovom slučaju gornji račun možemo provjeriti koristeći eksplicitni izraz

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \qquad D = (-\infty, 0).$$

Primjer

Međutim funkciju f^- ne možemo gledati na čitavom $I = (-\infty, 0]$ već samo na podskupu $D = (-\infty, 0)$ jer u točki 0 nije derivabilna. Dakle

$$f(x) = -\sqrt{-x}, \qquad x \in D = (-\infty, 0).$$

Da bi izračunali $f'(-4)$ ne treba nam eksplicitni izraz za $f'(x)$ već imamo

$$f'(-4) = -\frac{F'_x(-4,-2)}{F'_y(-4,-2)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

U ovom slučaju gornji račun možemo provjeriti koristeći eksplicitni izraz

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \qquad D = (-\infty, 0).$$

Jasno je da općenito takvu provjeru nećemo moći napraviti jer nećemo imati funkciju f eksplicitno zadanu već ćemo samo znati da postoji.

Primjer

Međutim funkciju f^{-} *ne možemo gledati na čitavom* $I = (-\infty, 0]$ *već samo na podskupu* $D = (-\infty, 0)$ *jer u točki* 0 *nije derivabilna. Dakle*

$$f(x) = -\sqrt{-x}, \qquad x \in D = (-\infty, 0).$$

Da bi izračunali $f'(-4)$ *ne treba nam eksplicitni izraz za* $f'(x)$ *već imamo*

$$f'(-4) = -\frac{F'_x(-4,-2)}{F'_y(-4,-2)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

U ovom slučaju gornji račun možemo provjeriti koristeći eksplicitni izraz

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \qquad D = (-\infty, 0).$$

Jasno je da općenito takvu provjeru nećemo moći napraviti jer nećemo imati funkciju f *eksplicitno zadanu već ćemo samo znati da postoji. Uočimo još da i točka* $(0,0)$ *zadovoljava* $F(0,0) = 0$, *ali u njoj prethodni teorem nije primjenjiv jer je* $F'_y(0,0) = 0$.

Primjer

Promotrimo jednadžbu

$$xyz - e^{-xyz} = 0$$

kao implicitnu vezu triju varijabli. Zbog očite simetrije svejedno je koju varijablu tretiramo kao zavisnu pa uzmimo da je to varijabla z.

Primjer

Promotrimo jednadžbu

$$xyz - e^{-xyz} = 0$$

kao implicitnu vezu triju varijabli. Zbog očite simetrije svejedno je koju varijablu tretiramo kao zavisnu pa uzmimo da je to varijabla z.
Imamo

$$F(x,y,z) = xyz - e^{-xyz}, \quad (x,y,z) \in X = \mathbb{R}^3$$

i u svim točkama $(x,y,z) \in X$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,z) &= \left(1 + e^{-xyz}\right) yz, \\ F'_y(x,y,z) &= \left(1 + e^{-xyz}\right) xz, \\ F'_z(x,y,z) &= \left(1 + e^{-xyz}\right) xy. \end{aligned}$$

Primjer

Promotrimo jednadžbu

$$xyz - e^{-xyz} = 0$$

kao implicitnu vezu triju varijabli. Zbog očite simetrije svejedno je koju varijablu tretiramo kao zavisnu pa uzmimo da je to varijabla z*.*
Imamo

$$F(x, y, z) = xyz - e^{-xyz}, \quad (x, y, z) \in X = \mathbb{R}^3$$

i u svim točkama $(x, y, z) \in X$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, z) &= \left(1 + e^{-xyz}\right) yz, \\ F'_y(x, y, z) &= \left(1 + e^{-xyz}\right) xz, \\ F'_z(x, y, z) &= \left(1 + e^{-xyz}\right) xy. \end{aligned}$$

Kako je

$$1 + e^{-xyz} > 1, \qquad \forall (x, y, z) \in X,$$

slijedi

$$F'_z(x, y, z) = \left(1 + e^{-xyz}\right) xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

Primjer

Dakle, teorem možemo primijeniti u svakoj točki $(x, y, z) \in X$ *u kojoj je zadovoljena početna jednadžba i za koju je* $x \neq 0 \neq y$.

Primjer

Dakle, teorem možemo primijeniti u svakoj točki $(x, y, z) \in X$ *u kojoj je zadovoljena početna jednadžba i za koju je* $x \neq 0 \neq y$.
Za svaku takvu točku postojat će okolina $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *i samo jedna funkcija* f *nezavisnih varijabli* x *i* y *koja je implicitno zadana početnom jednadžbom i neprekidno derivabilna na* D.

Primjer

Dakle, teorem možemo primijeniti u svakoj točki $(x, y, z) \in X$ *u kojoj je zadovoljena početna jednadžba i za koju je* $x \neq 0 \neq y$.
Za svaku takvu točku postojat će okolina $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *i samo jedna funkcija* f *nezavisnih varijabli* x *i* y *koja je implicitno zadana početnom jednadžbom i neprekidno derivabilna na* D.
Za parcijalne derivacije funkcije f *vrijedit će*

$$\begin{aligned} f_x'(x,y) &= -\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)} = -\frac{z}{x}, \\ f_y'(x,y,z) &= -\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)} = -\frac{z}{y}. \end{aligned}$$

Primjer

Dakle, teorem možemo primijeniti u svakoj točki $(x, y, z) \in X$ *u kojoj je zadovoljena početna jednadžba i za koju je* $x \neq 0 \neq y$.
Za svaku takvu točku postojat će okolina $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *i samo jedna funkcija* f *nezavisnih varijabli* x *i* y *koja je implicitno zadana početnom jednadžbom i neprekidno derivabilna na* D.
Za parcijalne derivacije funkcije f *vrijedit će*

$$\begin{aligned} f_x'(x, y) &= -\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)} = -\frac{z}{x}, \\ f_y'(x, y, z) &= -\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)} = -\frac{z}{y}. \end{aligned}$$

Naravno, za konkretne zadane vrijednosti $x \neq 0$ *i* $y \neq 0$ *pripadajuća vrijednost varijable* z *je jednoznačno određena početnom jednadžbom i ne možemo je egzaktno odrediti pomoću elementarnih funkcija varijabla* x *i* y.

Primjer

Međutim, i u ovom primjeru možemo gornje formule za parcijalne derivacije provjeriti neposrednim deriviranjem.

Primjer

Međutim, i u ovom primjeru možemo gornje formule za parcijalne derivacije provjeriti neposrednim deriviranjem.
Naime, uvođenjem pomoćne varijable $t = xyz$ početnu jednadžbu možemo napisati kao

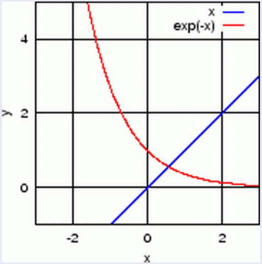
$$t = e^{-t}, \qquad t = xyz.$$

Primjer

Međutim, i u ovom primjeru možemo gornje formule za parcijalne derivacije provjeriti neposrednim deriviranjem.
Naime, uvođenjem pomoćne varijable $t = xyz$ početnu jednadžbu možemo napisati kao

$$t = e^{-t}, \qquad t = xyz.$$

Krivulja $y = e^{-x}$ i pravac $y = x$ sijeku se točno u jednoj točki s apscisom $c \in (0, 1)$ kako se vidi na slici



Primjer

Stoga jednadžba $t = e^{-t}$ *ima točno jedno rješenje* $t = c$. *Veličinu* c *ne možemo egzaktno izraziti koristeći elementarne funkcije jedne varijable, već samo možemo upotrijebiti neku od elementarnih numeričkih metoda da bismo dobili približnu vrijednost. Vrijedi* $c \approx 0.56$.

Primjer

Stoga jednadžba $t = e^{-t}$ *ima točno jedno rješenje* $t = c$. *Veličinu* c *ne možemo egzaktno izraziti koristeći elementarne funkcije jedne varijable, već samo možemo upotrijebiti neku od elementarnih numeričkih metoda da bismo dobili približnu vrijednost. Vrijedi* $c \approx 0.56$.
Zaključujemo da je početna jednadžba ekvivalentna s jednadžbom

$$xyz = c$$

iz koje dobivamo eksplicitno varijablu z *kao funkciju varijabla* x *i* y

$$z = f(x, y) = \frac{c}{xy}, \qquad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

Primjer

Stoga jednadžba $t = e^{-t}$ ima točno jedno rješenje $t = c$. Veličinu c ne možemo egzaktno izraziti koristeći elementarne funkcije jedne varijable, već samo možemo upotrijebiti neku od elementarnih numeričkih metoda da bismo dobili približnu vrijednost. Vrijedi $c \approx 0.56$.
Zaključujemo da je početna jednadžba ekvivalentna s jednadžbom

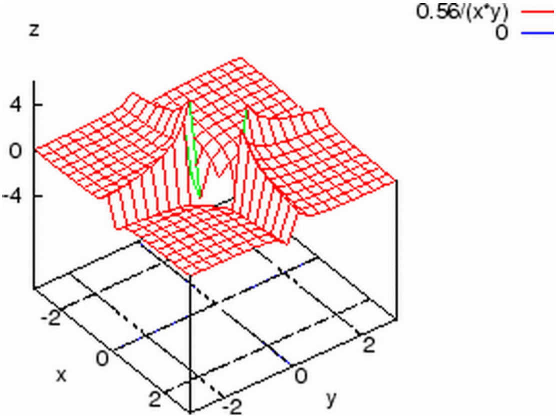
$$xyz = c$$

iz koje dobivamo eksplicitno varijablu z kao funkciju varijabla x i y

$$z = f(x, y) = \frac{c}{xy}, \qquad x \neq 0 \wedge y \neq 0.$$

Sada neposrednim deriviranjem dobijamo

$$f'_x(x, y) = -\frac{c}{x^2 y} = -\frac{z}{x}, \; f'_y(x, y) = -\frac{c}{xy^2} = -\frac{z}{y}.$$



Slika: Implicitno zadana funkcija $xyz = e^{-xyz}$